Projekt i matematik

Opgave 1 – Ballonudstyr

e) Bestem sidefladens areal

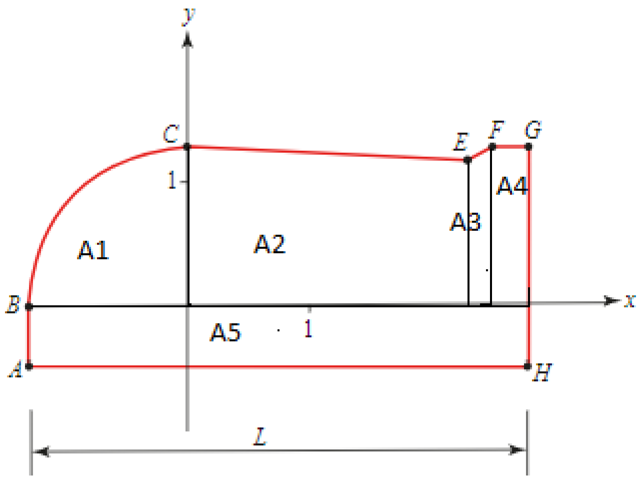
På figur 3, ses inddelingen af sidefladen.

A_1 er inddelt som en kvartcirkel

A_2, A_3 er inddelt således at arealet findes ved integralregning

A_4, A_5 er inddelt som rektangler

Først findes arealet af figur A_5, da figuren er en rektangel benyttes følgende formel til at udregne arealet



Figur 3 - Inddeling af sideflade i henholdsvis 2 rektangler, 1 kvartcirkel og 2 figurer som beregnes vha. integralregning

$$A = a \cdot b$$

Hvor a er længden og b er bredden. Ud fra vores informationer må vores formel se ud således

$$A_5 = L \cdot |H_y|$$

Da værdierne kendes, indsættes de således

$$A_5 = 4{,}1 \cdot 0{,}5 = 2{,}05$$

Arealet for A_4 findes også ved at benytte formlen for areal af en rektangel

Længden for A_4 må svare til dets y-værdi, dvs 1,3. Bredden for A_4 findes ved at trække henholdsvis punktet G og F's x-koordinater fra hinanden.

$$b_{A_4} = 2{,}8 - 2{,}5 = 0{,}3$$

Da kendes værdierne og indsættes nu i formlen for areal af rektangel

$$A_4 = 0{,}3 \cdot 1{,}3 = 0{,}39$$

For at finde arealet af A_1(kvartcirklen) benyttes følgende formel

$$A_{cirkel} = r^2 \cdot \pi$$

Denne formel er arealet for en hel cirkel, og derfor ganges $\frac{1}{4}$ og formlen ser da ud således

$$A_{1kvartcirkel} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}$$

Cirklens radius kendes som x-koordinatet fra punktet B, som i øvrigt er numerisk værdi. Da alle værdierne kendes indsættes værdierne

$$A_{1kvartcirkel} = 1{,}3^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = 1{,}33$$

Figur A_2 regnes ved hjælp af integralregning. Her benyttes maple samt dets tilhørende CAS-funktion til at beregne areal vha. bestemt integral.

$$A_2 = \int_0^{2.3} -0.043\ x + 1.3\, dx$$

$$A_2 = 2.876265000$$

(se bilag for beregning af henholdsvis $A_3 og\ A_2$i hånden)

Samme metode benyttes til beregne figuren A_3. Dog skal funktionen som beskriver linjestykket fra punktet E til F først bestemmes. Det ses ud fra en grafisk understøttelse (figur 3) at det må være en lineær funktion som beskriver linjen fra E til F. Dvs på formen $y = ax + b$

Først findes hældningskoefficienten. Dette gøres ved at benytte samme formel som i opgave 1c)

Da værdierne kendes, indsættes værdierne således

$$a_{EF} = \frac{1{,}3 - 1{,}2}{2{,}5 - 2{,}3} = 0{,}5$$

For at finde b-værdien for den lineær funktion vælges en af de to punkter (enten E eller F), hvor dets x samt y-værdi indsættes i funktionen. Herefter isoleres b, hvoraf en b-værdi for den lineære funktion findes. Lad os sætte koordinaterne for punktet F ind.

$$1{,}3 = 0{,}5 \cdot 2{,}5 + b$$

Nu isoleres b således

$$b = 1{,}3 - (0{,}5 \cdot 2{,}5)$$

Da fås b til følgende

$$b = 0{,}05$$

Da fås den lineære funktion fra punktet E til F til at være følgende

$$y = 0{,}5x \cdot 0{,}05$$

Da funktionen fra punktet E til F nu kendes, kan den indsættes i det bestemte integral, hvoraf arealet for A_3 da findes.

$$A_3 = \int_{2.3}^{2.5} 0.5\,x + 0.05\,\mathrm{d}x$$

$$A_2 = 0.2500000000$$

Da kendes arealerne for følgende figurer: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

Altså kendes arealerne for samtlige figurer som er dannet ud fra det samlede sideflade. For at finde det samlede areal af sidefladen, lægges da arealerne for ovenstående figurer sammen. Formlen for det samlede areal af sidefladen vil da se ud således

$$A_{sideflade} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Nu indsættes de fundne arealer

$$A_{sideflade} = 2{,}05 + 0{,}39 + 1{,}33 + 2{,}8762 + 0{,}25 = 6{,}90$$

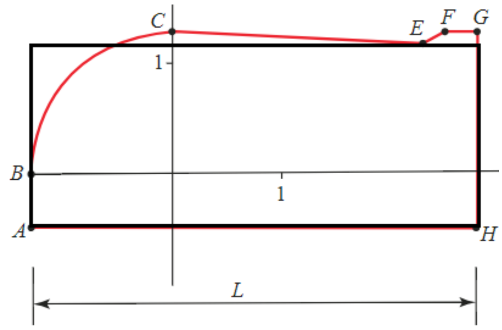
Altså er det samlede areal af sidefladen $6,90m^2$

Hvis sidefladen beskreves som en rektangel (figur 4), kan arealet af sidefladen udregnes således

$$A_{sidefalde-rektangel} = L \cdot (E_{y-koordinat} + |A_{y-koordinat}|)$$

Da værdierne kendes indsættes de og følgende fås

$$A_{sideflade-rektangel} = 4{,}1 \cdot (1{,}2 + 0{,}5) = 6{,}97$$



Figur 4 - Areal af sideflade beskrevet som rektangel

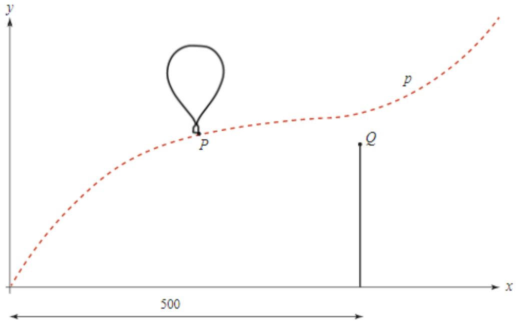
Da ses det at ovenstående areal er næsten identisk med det fundne areal vha. inddeling af sideflade. Altså vurderes det at det fundne areal (6,90), altså må være korrekt.

Opgave 2 – Turen

Sendemasten står 500 m fra opsendelsesstedet, og Q er dens øverste punkt, (se figur 8). Funktionen f beskriver afstanden mellem P og Q.

d) Opstil en forskrift for *f*

For at opstille en forskrift for f, benyttes afstandsformlen.



Figur 8 - Ballonens flyvetur

Hvor punktet Q har koordinaterne (500; 200), og punktet P har koordinaterne (x,p(x)). Formlen vil da se ud således med vores koordinater.

$$|PQ| = \sqrt{(x-500)^2 + (p(x)-200)^2}$$

Hvor x_1 og y_1 er Q's koordinater, og x_2 og y_2 er P's koordinater. For at få forskriften for funktionen f, vil p(x) da skrives ind i ovenstående formel således.

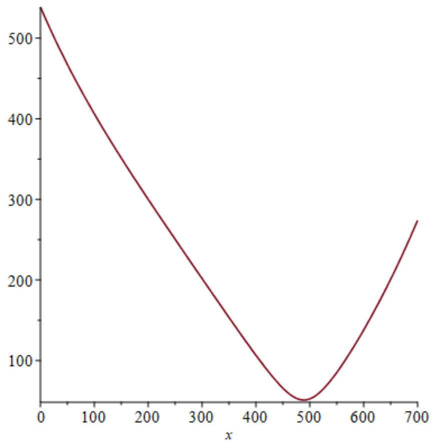
$$f(x) = \sqrt{(x-500)^2 + (3{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 - 4{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1{,}68x - 200)^2}$$

For at sikre at denne funktion er korrekt, afbildes funktionen i et koordinatsystem.

Som det fremgår af figur 9, så er den fundne funktion f korrekt.

Skipperen vil af sikkerhedsmæssige årsager ikke tættere på mastens øverste punkt end 50 m.

e) Bestem den mindste afstand mellem P og Q. Overholdes sikkerhedsafstanden?



Figur 9 - Afbildning af funktionen f, i intervallet (0;700) for x

For at bestemme den mindste afstand mellem P og Q, differentieres funktionen, samt sættes lig nul. Da findes minimummet for funktionen. Dette gøres vha. CAS-værktøjet maple. $fsolve(f' = 0) = 488.7452500$

Sammenholdes den visuelle vurdering som ses på figur 9 med ovenstående x-værdi, giver resultatet god mening og der ses en tydelig sammenhæng.

Nu sættes ovenstående x-værdi ind i forskriften for f, hvorved afstanden mellem P og Q findes

$f(488.7452500) = 51.05181612$

Afstanden mellem P og Q er altså 51.05 meter, og sikkerhedsafstanden overholdes altså.

I konkurrenceflyvning med luftballoner skal skipperen bringe ballonen så tæt på målet som muligt. Figur 10 viser et landskab set oppefra indlagt i et koordinatsystem. Ballonen opsendes fra origo O, og målet er givet ved punkt M(3000;1000). Alle afstande er i meter. Vindens hastighed varierer i forskellige luftlag, og skipperen kan derfor styre den vandrette bevægelse ved at ændre ballonens højde. På konkurrencedagen er vindens vandrette hastighed i to forskellige højder givet ved

$\overrightarrow{v_1} = \binom{4}{y_1}$ og $\overrightarrow{v_2} = \binom{4}{3}$

Størrelsen af $y_1$er bestemt i spørgsmål 1a, og er for mit vedkommende $0{,}8\frac{m}{s}$

f) Bestem vinklen mellem v_1 og v_2

Figur 10 - Landskab oppefra indlagt i et koordinatsystem

For at bestemme vinklen mellem de to vektorer, benyttes formlen for vinklen mellem vektorer. Med mine symboler ser formlen ud således. Desuden anses symbolet * som et at "prikke" tegn.

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{v_1} * \overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}|}$$

Nu udregnes vinklen således

$$\cos(v) = \frac{\binom{4}{0{,}8} * \binom{4}{3}}{\left|\binom{4}{0{,}8}\right| \cdot \left|\binom{4}{3}\right|} = \frac{4 \cdot 4 + 0{,}8 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 0{,}8^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{18{,}4}{\sqrt{16{,}64} \cdot \sqrt{25}} = \frac{18{,}4}{20{,}40} = 0{,}90$$

Nu tages det inverse cosinus af ovenstående værdi, hvoraf vinkel v findes

$$v = \cos^{-1}(0{,}90) = 25{,}84^o$$

Vinkle mellem v_1 og v_2 må altså være $25{,}84^o$

De to vindhastigheder er illustreret med stiplede pile på figur 10. Vindhastigheder måles i meter pr. sekund.

Der findes reelle tal s og t således at,

$$\overrightarrow{OM} = s \cdot \overrightarrow{v_1} + t \cdot \overrightarrow{v_2}$$

g) Bestem tallene s og t

$\overrightarrow{OM}$ Kendes til $(3000; 1000)$, da O ligger i origo $(0; 0)$ og koordinaterne for M kendes til $(3000; 1000)$, og derfor må disse koordinater også gælde for $\overrightarrow{OM}$, da O netop lægger i origo. Desuden kendes $v_1 \; og \; v_2$ også, og formlen ser da ud således

$$\binom{3000}{1000} = s \cdot \binom{4}{0{,}8} + t \cdot \binom{4}{3}$$

Dette giver os to ligninger med to ubekendte:

1) $3000 = s \cdot 4 + t \cdot 4$
2) $1000 = s \cdot 0{,}8 + t \cdot 3$

t isoleres i 1):$\frac{3000}{4} = s \cdot 4 + t \Leftrightarrow \frac{3000-s\cdot 4}{4} = t$ 3)

Nu indsættes i 2):

$$1000 = s \cdot 0{,}8 + \frac{3000 - s \cdot 4}{4} \cdot 3$$

$$1000 = s \cdot 0{,}8 + \frac{9000 - s \cdot 12}{4}$$

$$1000 = s \cdot 0{,}8 + 2250 - 3s$$

$$1000 - 2250 = s \cdot 0{,}8 - 3s$$

$$-\frac{1250}{0{,}8} = s - \frac{3s}{0{,}8}$$

$$-\frac{1250}{0{,}8} = s - 3{,}75s$$

$$-1562{,}5 = -2{,}75s$$

$$568{,}18 = s$$

Jeg indsætter s i 3)

$$\frac{3000 - 568{,}18 \cdot 4}{4} = t$$

$$181{,}82 = t$$

s er altså lig 568,18 og t er lig 181,82. For at sikre at dette er korrekt, sættes værdierne ind, hvoraf ligningen gerne skulle give 0

$$\binom{3000}{1000} = 568{,}18 \cdot \binom{4}{0{,}8} + 181{,}82 \cdot \binom{4}{3}$$

$$568{,}18 \cdot 4 + 181{,}82 \cdot 4 = 3000$$

$$568{,}18 \cdot 0{,}80 + 181{,}82 \cdot 3 = 1000$$

Som det ses på ovenstående beregning så fås følgende $\binom{3000}{1000}$. Det ses altså at der fås de samme værdier og derfor gælder følgende

Altså passer de fundne værdier for s og t. Det kan altså konkluderes at $\boldsymbol{s = 568{,}18\ og\ t = 181{,}82}$

Opgave 3 – Fotografering

d) Opstil efter eget valg en matematisk model, der beskriver omridset af ballonhylstrets skygge, som det fremgår på billedet.

OBS, Jeg har valgt at opstille en matematisk model, som både beskriver ballonhylstret og kurven

Figur 13 - billede af luftballonens skygge

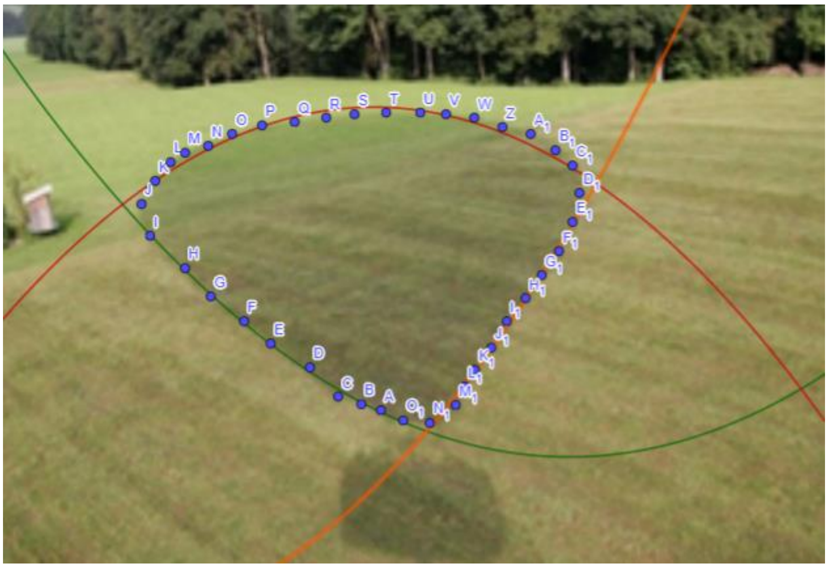
Ballonens skygge beskrives vha. tre andengradspolynomier. Henholdsvis et andengradspolynomie for venstre del af ballonens skygge, et andengradspolynomie til toppen af ballonens skygge, og et andengradspolynomie som beskriver højre del af ballonens skygge. (Punkterne samt deres koordinater som bruges til at danne de tre andengradspolynomier kan findes i bilag).

$f(x) = 0.08x^2 - 1.44x + 8.5$

$g(x) = -0.1x^2 + 1.15x + 4.28$

$h(x) = 0.12x^2 - 0.35x - 0.06$

Figur 14 - Tilhørende forskrifter til andengradspolynomierne som ses på figur 14



Figur 15- Skyggen af ballonen beskrevet med tre andengradspolynomier

De tre andengradspolynomier kan beskrives med ovenstående funktionsforskrifter. Forskrifterne er farvekodet, således at den grønne funktionsforskrift tilhøre det grønne andengradspolynomie som findes på figur 15. Den tilhørende kurv, som ses nederst på figur 15 kan desuden beskrives vha. en femkant.

Den matematiske model der beskriver ballonhylstrets og ballonkurvens skyggeomrids, er altså tre andengradspolynomier samt en femkant.