Projektoplæg

Matematik A

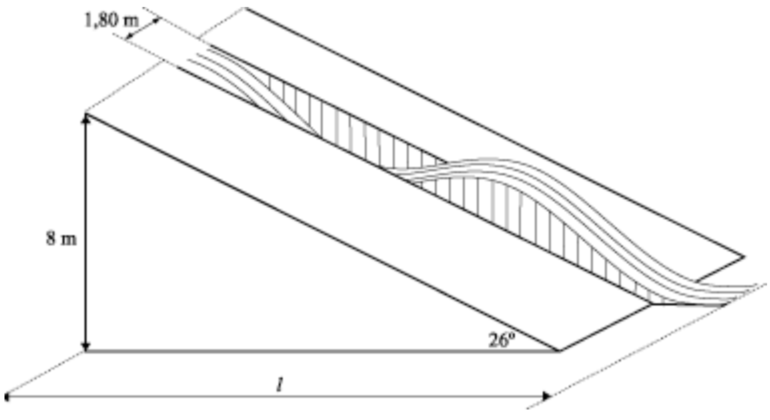
Rutschebane

Indledning

I et hjørne af en forlystelsespark, har man en lille bakke, der er dannet af jord fra diverse udgravninger til parkens forlystelser. I dette hjørne vil man anlægge forlystelser for mindre børn.
En af idéerne er at lade jordbunken indgå i en lille rutschebane. Rutschebanen skal anlægges som et skinnespor, hvorpå der kører små vogne.
Fra et sted på bakken, der ligger 8 meter over det omgivende terræn, skråner bakken jævnt med en vinkel på 26°. På denne skråning skal et stykke af banen anlægges.
For at gøre rutschebanen mere spændende og for at danne en glat overgang til det vandrette niveau, skal banestykket have varierende hældning ned langs siden. Bredden af banestykket skal være 1,80 meter. (Se figur 1).

Figur 1

Parkens arkitekt har lavet en skitse over, hvordan denne del af banen eventuelt kunne se ud (se figur 2).



Figur 2

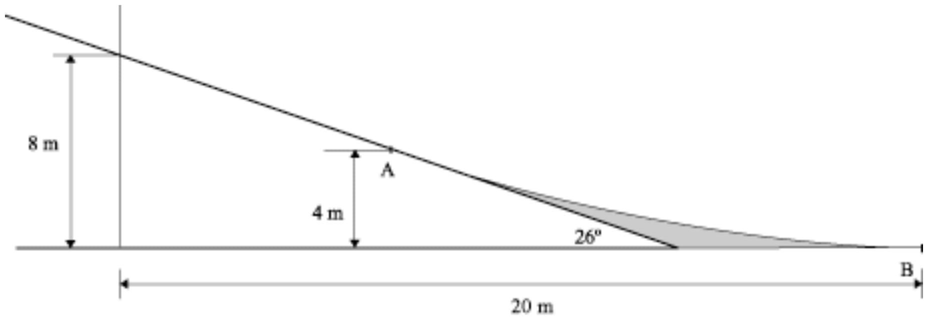
Skitsen viser blot det udsnit af bakken, hvor det pågældende banestykke skal anlægges.
Der må ikke være skarpe knæk på banen, og den vandrette længde l må højest være 25 meter.

Opgaver

Opgave 1

En forholdsvis enkel måde at danne en bane på, er at indlægge en del af grafen for et 3. gradspolynomium, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, der tangerer bakkens profil i punkt *A* og det vandrette niveau i punkt *B*.

Med dette som udgangspunkt foreslår parkens arkitekt en løsning som vist på figur 3.



Figur 3

a) Indlæg banen i et passende koordinatsystem.

b) Bestem en regneforskrift for det 3. gradspolynomium, hvis graf danner kurven fra *A* til *B*.

Opgave 2

Du skal nu selv finde en kurve (profil) for banen, der opfylder følgende krav:

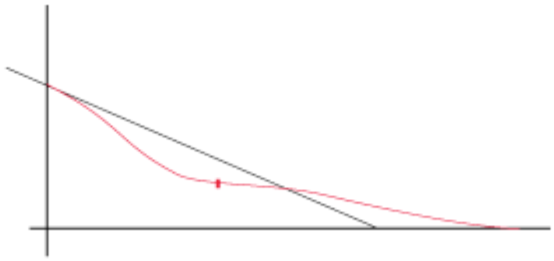
- Kurven skal dannes af grafer for en eller flere trigonometriske funktioner af typen $f(x) = A \cdot \sin(a \cdot x + b) + c$.

- Der må ikke være skarpe knæk på kurven. Det betyder, at i punkter, hvor kurven er sat sammen af graferne for to funktioner, skal tangenthældningen for de to grafer være den samme i overgangspunktet. **Dette gælder også ved banestykkets start- og slutpunkt.**

Kurver der opfylder kravene til banen kan konstrueres på mange måder:
Man kan vælge at benytte en del af den oprindelig skråning og tilføje et nyt stykke, som det blev gjort i opgave 1.
Alternativt kan kurven dannes af grafer for flere trigonometriske funktioner, hvor funktionerne er defineret på hvert sit interval. Nedenfor er vist eksempler på kurver, der er dannet af grafer for to funktioner.

Kurven på figur 4 er et eksempel på en kurve, der er sammensat af graferne for to trigonometriske funktioner. De to grafer mødes i det markerede punkt.

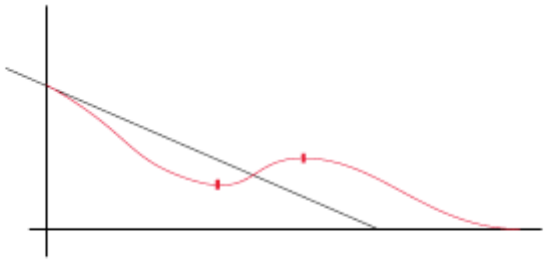
Funktionerne er af formen $f(x) = A \cdot \sin(a \cdot x + b) + c$



Figur 4

Kurven på figur 5 er et eksempel på en kurve, der er dannet af 3 trigonometriske funktioner. Graferne for de tre funktioner mødes i de markerede punkter.

Funktionerne er atter af formen
$f(x) = A \cdot \sin(a \cdot x + b) + c$.



Figur 5

a) Opstil og begrund dine kriterier for banens forløb.

b) Bestem regneforskrifter for de funktioner, hvis grafer danner banestykkets profil.

c) Indtegn banestykket i et passende retvinklet koordinatsystem.

Kurven skal undersøges med hensyn til hældning.

d) Bestem den største hældningsvinkel på banestykket.

Opgave 3 Teoriafsnit

Teoriafsnittet skal indeholde elementer, der beskriver følgende emner:

a) Trigonometriske funktioner. Beskriv bl.a. betydningen af konstanterne *A*, *a*, *b* og *c*.

b) Differentialregning. Relevante definitioner og regneregler.

c) Sammensat funktion. Definition og differentiation.

Generelle bemærkninger om kurvetilpasning

Der kan altid (og entydigt) bestemmes en regneforskrift for et 2. gradspolynomium af formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

hvis graf opfylder 3 uafhængige betingelser.
De tre koefficienter *a*, *b* og *c* fastlægger entydigt polynomiet. Man siger, at et 2. gradspolynomium har 3 frihedsgrader. For at kunne bestemme værdierne for *a*, *b* og *c* skal der kunne opstilles 3 ligninger med de 3 ubekendte *a*, *b* og *c*.

Tilsvarende kan man finde en regneforskrift for et 3. gradspolynomium, hvis graf opfylder 4 betingelser. Regneforskriften for et 4. gradspolynomium er entydigt bestemt ved 5 betingelser osv…..

På lignende måde er en trigonometrisk funktion af formen

$$f(x) = A \cdot \sin(a \cdot x + b) + c$$

entydigt bestemt ved 4 betingelser, som det var tilfældet for 3. gradspolynomiet, da der også her er 4 frihedsgrader, givet ved de 4 konstanter *A*, *a*, *b* og *c*.